

**Міністерство освіти і науки України
Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара**

Кафедра математичного аналізу і теорії функцій

**ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ
З МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ ЗА ТЕМОЮ
«РЯДИ»**

Практикум

**Київ
Діасофт
2016**

Наведені основні методи дослідження числових і функціональних рядів.

Для студентів університету, що вивчають курси “Вища математика” і “Математичний аналіз”.

Рекомендовано до друку вченою радою
механіко-математичного факультету (протокол № 4 від 22 грудня 2015 р.)

Рецензенти:

А. В. Тушев, доктор фіз.-мат. наук, професор кафедри геометрії і алгебри
Дніпропетровського національного університету імені Олеся Гончара

Т. М. Семиренко, кандидат фіз.-мат. наук, доцент кафедри вищої
математики Дніпропетровського державного аграрно-економічного
університету

**Індивідуальні завдання
з математичного аналізу за темою
«Ряди»
Практикум**

Укладачі: канд. фіз.-мат. наук, доц. М. Б. Вакарчук
канд. фіз.-мат. наук, доц. О. О. Руденко

© Вакарчук М. Б., Руденко О. О., 2016

Передмова

Теорія рядів є одним з важливих розділів курсу вищої математики. Ряди широко використовуються при наближеному обчисленні значень функцій, обчисленні інтегралів, знаходженні наближених розв'язків диференціальних рівнянь і т.д. Цим обумовлено їх застосування у багатьох прикладних задачах природознавства і техніки.

Перша частина видання являє собою опорний конспект, який складається з основних формул і понять. Головну увагу приділено формуванню практичних навиків розв'язування задач. Згідно з цим матеріал систематизовано у вигляді таблиць і схем таким чином, що можна легко знайти необхідну формулу або визначення. Варто підкреслити, що таке викладення сприяє засвоєнню лекційного матеріалу, але не замінює його.

У другій частині видання вміщені варіанти завдань для індивідуального виконання.

1. Числові ряди

1.1. Основні поняття

Основні поняття	Означення
Числовий ряд	$a_1 + a_2 + \dots a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, де $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ – члени ряду. $a_n = f(n)$ – загальний член ряду.
Частинна сума ряду	$S_k = a_1 + a_2 + \dots a_k$ – k-та частинна сума ряду.
Сума ряду	$S = \lim_{k \rightarrow \infty} S_k$
Збіжність ряду	Ряд збігається, якщо S є скінченною, тоді $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$. Позначають також $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$.
Розбіжність ряду	Ряд розбіжний, якщо його сума S є нескінченною або не існує. Позначають $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$.
Види числових рядів	Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називається знакододатним , якщо $a_n > 0 \forall n$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називається знаковід'ємним , якщо $a_n < 0 \forall n$. Знакододатні та знаковід'ємні ряди називаються знакосталими . Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називається знакозмінним , якщо він містить нескінченну кількість додатних і нескінченну кількість від'ємних членів. Ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 - a_2 + \dots + (-1)^{n-1} a_n + \dots$ ($a_n > 0$) називається знакопochередним .

Необхідна умова збіжності числового ряду

Якщо $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається, то $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Достатня умова розбіжності числового ряду

Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ розбігається.

Деякі важливі ряди

Назва	Вигляд	Поведінка
Узагальнений гармонічний ряд	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$	Збігається, якщо $\alpha > 1$, розбігається, якщо $\alpha \leq 1$.
Геометрична прогресія	$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$	Збігається, якщо $ q < 1$, розбігається, якщо $ q \geq 1$.

1.2. Знакосталі ряди

Достатні ознаки збіжності знакододатних рядів

Назва	Означення	
Ознака порівняння	Якщо $0 \leq a_n \leq b_n \quad \forall n$, тоді із збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ випливає збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, а з розбіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – розбіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.	
Гранична ознака порівняння	Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = l$, то при $0 < l < \infty$ ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ та $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ збігаються або розбігаються одночасно.	
Ознака д'Аламбера	Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$,	то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ при $0 \leq q < 1$ збігається, при $q > 1$ – розбігається.
Ознака Коші	Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q$,	
Інтегральна ознака	Якщо функція f спадає на $[1, +\infty)$ та є невід'ємною, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ збігається або розбігається одночасно з інтегралом $\int_1^{+\infty} f(x) dx$.	

Деякі допоміжні відомості

Деякі граничні співвідношення	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_0 n^p + a_1 n^{p-1} + \dots + a_p}{b_0 n^m + b_1 n^{m-1} + \dots + b_m} = \begin{cases} 0, & p < m, \\ \frac{a_0}{b_0}, & p = m, \\ \infty, & p > m. \end{cases}$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad (a > 0)$
Важливі границі та їх наслідки	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = 1,$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\mu - 1}{x} = \mu$
Факторіал	$n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1)! \cdot n, \quad 0! = 1! = 1$
Подвійний факторіал	$(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1),$ $(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n$

Схема дослідження збіжності знакосталого ряду

Перевіряємо необхідну умову збіжності. Якщо вона не виконується, то ряд розбігається і дослідження збіжності закінчено. Якщо необхідна умова виконується або перевірка цього питання є складною, то треба застосувати необхідні ознаки збіжності.

Пробуємо застосувати ознаку порівняння (або граничну ознаку порівняння), тобто:

або шукаємо оцінку $a_n \leq b_n$, де відомо, що $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$;

або шукаємо оцінку $a_n \geq b_n$, де відомо, що $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$;

або шукаємо b_n таке, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = l$, $0 < l < \infty$, де $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ – відомий ряд.

Якщо ознаку порівняння застосувати не вдається, або її застосування потенційно виглядає занадто громіздким, пробуємо застосувати одну з наступних ознак:

Ознаку д'Аламбера, якщо $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ є простим виразом;

Ознаку Коші, якщо $\sqrt[n]{a_n}$ є простим виразом.

(Якщо застосування однієї з ознак д'Аламбера або Коші не дає відповіді про збіжність ряду ($q=1$), то застосування іншої з цих ознак недоцільне).

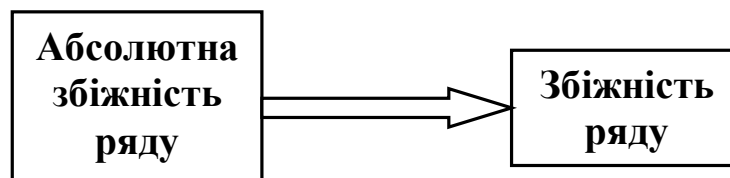
Інтегральну ознаку, якщо $a_n = f(n)$ задовольняє умовам відповідної теореми, причому інтеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ можна безпосередньо обчислити.

1.3. Знакозмінні ряди

Збіжність знакозмінних рядів

Вид збіжності	Означення
Абсолютна збіжність	Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ є збіжним абсолютно, якщо збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n $.
Умовна збіжність	Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називається збіжним умовно, якщо цей ряд збігається, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n $ розбігається.

Зв'язок між абсолютною та умовною збіжностями



Достатня ознака збіжності знакопередного ряду

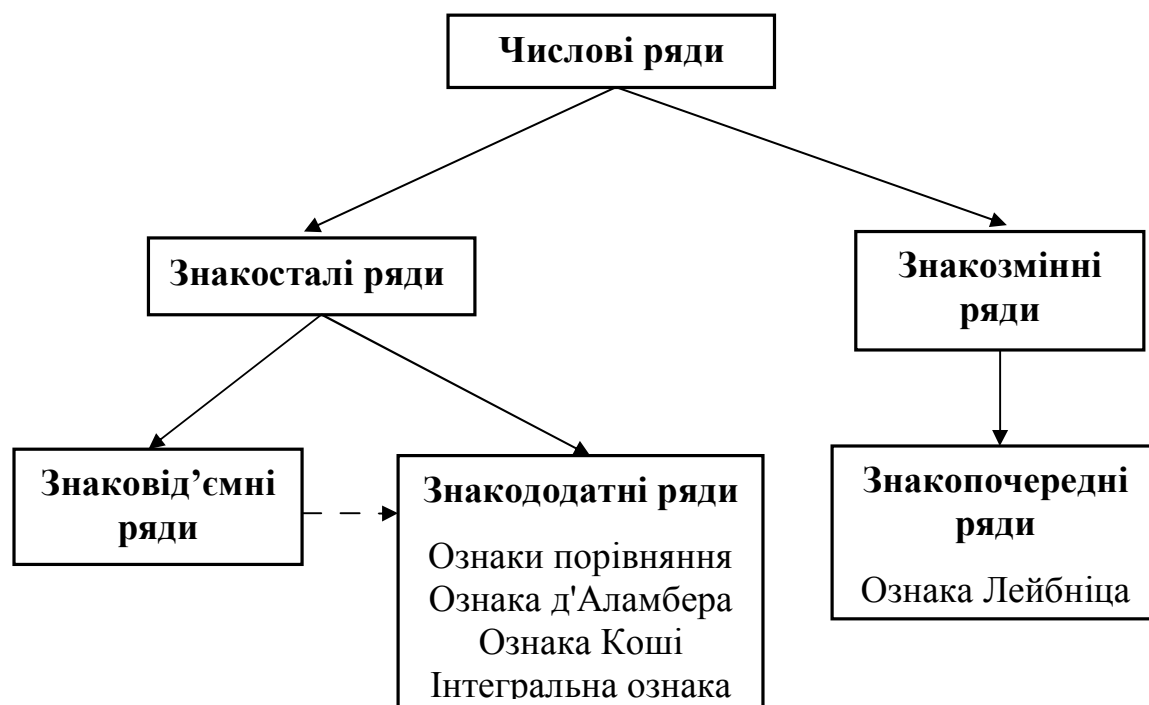
Назва	Означення
Ознака Лейбніца	Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$, $a_n > 0$, збігається, якщо $\{a_n\}$ монотонно прямує до нуля, тобто 1) $a_n \geq a_{n+1} \quad \forall n$; 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

1.4. Загальна схема дослідження збіжності числового ряду

Перевіряємо необхідну умову збіжності. Якщо вона не виконується, то ряд розбігається і дослідження збіжності закінчено. Якщо необхідна умова виконується або перевірка цього питання є складною, то рухаємось далі.

Якщо ряд є знакосталим, то його досліджуємо за відповідною схемою (див. вище). Дослідження збіжності знаковід'ємного ряду є рівносильним розгляду відповідного знакододатного ряду.

Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ є знакозмінним, то починати треба з розгляду ряду з модулів. Якщо ряд з модулів $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ збігається, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається **абсолютно** і дослідження збіжності закінчено. Якщо ряд з $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ розбігається і ряд є *знакопосереднім*, то застосовуємо ознаку Лейбніца. Якщо за цією ознакою ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається, то його вважають збіжним **умовно**.



2. Степеневі ряди

2.1. Основні поняття

Основні поняття	Означення
Степеневий ряд за степенями $x-A$	$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-A)^n, \quad (1)$ $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots \in R, \quad x \in R$
Степеневий ряд за степенями x	$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad (2)$ $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots \in R$
Коефіцієнти степеневого ряду	Сталі $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$
Радіус збіжності	$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left \frac{a_n}{a_{n+1}} \right \quad (3)$ або $R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{ a_n }} \quad (4)$
Інтервал збіжності	Для ряду (1) $(A-R, A+R)$ Для ряду (2) $(-R, R)$
Область збіжності	Множина всіх точок збіжності. Областю збіжності є інтервал збіжності доповнений, можливо, його межовими точками.
Ряд Тейлора	Якщо $f(x)$ має похідні будь-якого порядку в околі точки $x=a$, її рядом Тейлора називається степеневий ряд $f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots =$ $= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$
Ряд Маклорена	Частинний випадок ряду Тейлора, якщо $a=0$ $f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$

2.2. Схема дослідження області збіжності степеневому ряду

1. За формулою (3) або (4) знайти *радіус збіжності* ряду.
2. Знайти *інтервал збіжності*. Для ряду (1) $(A - R, A + R)$. Для ряду (2) $(-R, R)$.
3. В *граничних точках* інтервалу збіжності дослідити відповідні числові ряди (див. загальну схему дослідження збіжності числового ряду).
4. Граничні точки, в яких відповідні числові ряди збігаються, приєднати до інтервалу збіжності.

2.3 Розкладання основних елементарних функцій в Ряд Маклорена

Розкладання	Область збіжності
$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$	$x \in \mathbf{R}$
$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots$	$x \in \mathbf{R}$
$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$	$x \in \mathbf{R}$
$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots$	$x \in (-1, 1]$
$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \dots$	$x \in (-1, 1)$
$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n \dots$	$x \in (-1, 1)$
$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$	$x \in (-1, 1)$

3. Ряди Фур'є

3.1. Основні поняття

Основні поняття	Означення
Періодична функція	Функцію $f(x)$ називають періодичною з періодом T ($T \neq 0$), якщо $f(x+T) = f(x)$, $\forall x \in D(f)$.
Обмежена функція	Функцію $f(x)$ називають обмеженою, якщо $\exists M > 0: f(x) \leq M$, $\forall x \in D(f)$.
Кусково-неперервна на відрізку функція	Функція, що має на цьому відрізку скінченну кількість точок розриву першого роду.
Кусково-монотонна на відрізку функція	Функція, що є монотонною на скінченній кількості ділянок цього відрізка.
Тригонометрична система	$1, \cos \frac{\pi x}{l}, \sin \frac{\pi x}{l}, \dots, \cos \frac{n\pi x}{l}, \sin \frac{n\pi x}{l}, \dots$
Коефіцієнти Фур'є функції f	$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, n = 0, 1, 2, \dots, \quad (5)$ $b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, n = 1, 2, \dots \quad (6)$
Ряд Фур'є функції f на інтервалі $[-l, l]$:	$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$

Достатня умова подання функції через її ряд Фур'є

Назва	Означення
Ознака Діріхле	Якщо $2l$ періодична функція $f(x)$ кусково-неперервна, кусково-монотонна та обмежена на відрізку $[-l, l]$ то її ряд Фур'є збігається в кожній точці відрізка: $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right) = \frac{1}{2} (f(x-0) + f(x+0)).$ Тобто, якщо x_0 точка неперервності функції $f(x)$, то її ряд Фур'є в цій точці збігається до $f(x_0)$.

3.2. Схема розкладання функції у ряд Фур'є

1. Знайти коефіцієнти Фур'є функції f за формулами (5), (6).

Якщо функція задана декількома різними формулами на різних частинах інтервалу $[-l, l]$, то потрібно розбити інтервал інтегрування, а потім обчислювати вказані інтеграли як суму інтегралів.

$$\text{Якщо } f - \text{ парна, то } b_n = 0 \quad \forall n; \quad a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx;$$

$$\text{Якщо } f - \text{ непарна, то } a_n = 0 \quad \forall n; \quad b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$

Якщо функція задана на довільному інтервалі $[a, b]$ довжиною $2l$, то в формулах (5), (6) границі інтегрування будуть a і $a + 2l$.

2. Підставити знайдені коефіцієнти у формулу (6).

$$\text{Якщо } f - \text{ парна, - її ряд Фур'є - } \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l}.$$

$$\text{Якщо } f - \text{ непарна, - її ряд Фур'є - } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Якщо функція f задана на інтервалі $[0, l]$, її ряд Фур'є по косинусах можна одержати при парному, а ряд по синусах – при непарному продовженні даної функції на сусідній зліва інтервал $[-l, 0)$.

4. Завдання для самостійної роботи

4.1. Знайти суму ряду:

1. $\frac{1}{8} + \frac{1}{35} + \dots + \frac{1}{9n^2 - 1} + \dots;$
2. $\frac{1}{1 \cdot 7} + \frac{1}{3 \cdot 11} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+7)} + \dots;$
3. $\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \dots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} + \dots;$
4. $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots;$
5. $\frac{1}{1 \cdot 6} + \frac{1}{2 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{n(n+5)} + \dots;$
6. $\frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \dots;$
7. $\frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \dots;$
8. $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} + \dots;$
9. $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} + \dots;$
10. $\frac{1}{1 \cdot 11} + \frac{1}{2 \cdot 12} + \dots + \frac{1}{n(n+10)} + \dots;$
11. $\frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{1}{5 \cdot 7 \cdot 9} + \dots + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)} + \dots;$
12. $\frac{1}{6 \cdot 7 \cdot 8} + \frac{1}{7 \cdot 8 \cdot 9} + \dots + \frac{1}{(n+5)(n+6)(n+7)} + \dots;$
13. $\frac{1}{5} + \frac{1}{45} + \dots + \frac{1}{16n^2 - 8n - 3} + \dots;$
14. $\frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{n^2 - 1} + \dots;$
15. $\frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{1}{5 \cdot 6 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(n+3)(n+4)(n+5)} + \dots;$
16. $\frac{1}{1 \cdot 16} + \frac{1}{2 \cdot 17} + \dots + \frac{1}{n(n+15)} + \dots;$

17. $\frac{1}{1 \cdot 4 \cdot 7} + \frac{1}{2 \cdot 5 \cdot 8} + \dots + \frac{1}{n(n+3)(n+6)} + \dots;$
18. $\frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \dots + \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} + \dots;$
19. $\frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6} + \dots + \frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)} + \dots;$
20. $\frac{2}{1^2 \cdot 3^2} + \frac{3}{2^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{n+1}{n^2(n+2)^2} + \dots;$
21. $\frac{1}{5} + \frac{1}{21} + \dots + \frac{1}{4n^2 + 4n - 3} + \dots;$
22. $\frac{1}{1^2 \cdot 3^2} + \frac{2}{3^2 \cdot 5^2} + \dots + \frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2} + \dots;$
23. $\frac{1}{24} + \frac{1}{104} + \dots + \frac{1}{25n^2 + 5n - 6} + \dots;$
24. $\frac{1}{5 \cdot 6 \cdot 7} + \frac{1}{6 \cdot 7 \cdot 8} + \dots + \frac{1}{(n+4)(n+5)(n+6)} + \dots;$
25. $\frac{4}{1 \cdot 3} + \frac{4}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{4}{(2n-1)(2n+1)} + \dots$

4.2. Користуючись ознакою порівняння, дослідіть на збіжність ряд:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{n(n+1)};$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 + 3(-1)^n}{2^{n+3}};$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi/(4n))}{\sqrt[5]{2n^5 - 1}};$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 5n}{n\sqrt{n}};$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctg n}{n^2 + 1};$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)4^n};$
7. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{\ln n};$
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n+1)^n};$
9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{2^n(2^n - 1)};$
10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{1 + 3^{2n}};$
11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 4^n};$
12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n^2 + 3)^{5/3}};$

$$13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n};$$

$$14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \cdot 5^n};$$

$$15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{3^n(3^n-1)};$$

$$16. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7+2(-1)^n}{3^{n+2}};$$

$$17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi/(6n))}{\sqrt[3]{4n^3-1}};$$

$$18. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(3n+1)^n};$$

$$19. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{(2n+1) \cdot 5^n};$$

$$20. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{15^n}{4^n(3^n-2)};$$

$$21. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(n+1)}{\sqrt[3]{n^4+2}};$$

$$22. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^4 3n}{\sqrt{n^3+n+1}};$$

$$23. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6+2(-1)^n}{5^{n+1}};$$

$$24. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{1+4^{2n}};$$

$$25. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n^3+2n+1)^{4/3}}.$$

4.3. Користуючись граничною ознакою порівняння, дослідити на збіжність ряди:

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(2n+7)(2n+5)}},$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+2}{(2n-1)^2},$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{\sqrt[3]{(4n^3-1)(2n-1)}},$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n^4} \cdot \sqrt[4]{2n-1}},$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n+1}}{\sqrt[3]{3n^5-1}},$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+2}},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1-\cos(2\pi/n)).$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \operatorname{arctg} \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{1+n^{4/3}}{n \cdot \sqrt[3]{n}}.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \operatorname{arctg} \frac{5}{3^n}.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^4+5n^2}{n^4+1}.$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n+\ln n}.$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^2+5} - \sqrt{n^2+2}),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (e^{\frac{1}{n}} - 1) \sin \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8n-5}{\sqrt[3]{n^4+2n+1}},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \arcsin \frac{1}{\sqrt[5]{n^4}}.$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{(2n^2-1)(n^3+n+1)},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^2+4n}{n^2+1}.$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^3+2} - \sqrt{n^3+1}),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \operatorname{tg} \frac{n+2}{n^2+5}.$$

$$11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{(4n-1)(3n-2)}},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \operatorname{arctg} \frac{n+1}{\sqrt[3]{n^4+4}}.$$

$$12. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+1}{(4\sqrt{n}-1)^5},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (e^{\operatorname{tg}(1/n)} - 1)^2.$$

$$13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{\sqrt[3]{n^2} \cdot \sqrt[4]{8n-1}},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{(\sqrt{n}+1)^3}{n^3+3n+2}.$$

$$14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^3+7n^2+1}{4n^4+n^3-2n-1},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{n}+2}{2n+3\sqrt{n}-1}.$$

$$15. \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+3} - \sqrt{n+2}),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{2n+1}{n^3+5n-3}.$$

$$16. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}{\sqrt[3]{n+3}},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^3+4n^2}{n^3+1}.$$

$$17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n^2+1}}{\sqrt[4]{3n^6+n-1}},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (e^{\sqrt[3]{n}/(n^2+2n-1)} - 1).$$

$$18. \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^2+4} - \sqrt{n^2+1}),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\sqrt[3]{n}+2}{n^2+3}.$$

$$19. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n-2}{\sqrt[4]{(2n^5-1)(n+1)}},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n^3+1)+2n^3}.$$

$$\begin{array}{ll}
20. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^3 + n^2 - \sqrt{n}}{2\sqrt{n^7} + 3n - 1}, & \sum_{n=1}^{\infty} (e^{1-\cos(1/\sqrt{n})} - 1)^2. \\
21. \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^3 + 3n} - \sqrt{n^3 + n}), & \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^5 + 8n^3}{n^5 + 4}. \\
22. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+4} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{2n-1}}, & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n^2 + 1) + n^2}. \\
23. \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{4n^3 + 2n^2 + 3n + 1}{5n^4 - n - 1}}, & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arcsin(1/\sqrt{n})}{\sqrt[3]{2n^6 + 2n + 1}}. \\
24. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{3n^2 - 1}}{\sqrt{n^2 + 2n + 6}}, & \sum_{n=1}^{\infty} (e^{2/n} - 1) \arcsin \frac{1}{\sqrt{2n^2 + n + 1}}. \\
25. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - n}}{\sqrt{n^2 + 1}}, & \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \operatorname{tg} \frac{n}{n^3 + 2n - 1}.
\end{array}$$

4.4. Користуючись ознакою д'Аламбера, дослідити на збіжність ряд:

$$\begin{array}{ll}
1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}; & 8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{(n+1)!}; \\
2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n^2-1}}{2^{n^2} \sqrt{n}}; & 9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{3^n \cdot n!}; \\
3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2 3^n}{(2n)!}; & 10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2}{(n!)^2}; \\
4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n-1)!!}; & 11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{3^{n^2}}; \\
5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^n}; & 12. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \dots \cdot (4n-3)}{(4n-2)!!}; \\
6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(2n)!}; & 13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 11 \cdot 21 \cdot \dots \cdot (10n-9)}{(2n-1)!!}; \\
7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{3n-1}}{3^{5n+1}}; & 14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 9 \cdot \dots \cdot n^2}{(4n-3)!!};
\end{array}$$

$$15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n-2)}{(2n-1)!!};$$

$$16. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!}{(3n+4) \cdot 3^n};$$

$$17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!!}{1 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (3n+1)};$$

$$18. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (3n+2)}{2^n (n+1)!};$$

$$19. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!!}{3^n \cdot n!};$$

$$20. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{(2n)!!};$$

$$21. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \cdot 4^n}{n^n};$$

$$22. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n (2n+1)};$$

$$23. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n-3}{\sqrt{n} \cdot 3^n};$$

$$24. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^{3n}}{(2n-5)!};$$

$$25. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n+1}}{2^{3n-1}}.$$

4.5. Користуючись ознакою Коші, дослідити на збіжність ряд:

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{((n+1)/n)^{n^2}}{3^n};$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} n^n \cdot \sin^n \frac{1}{2n};$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot (n/(n+1))^{n^2};$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} n^5 \cdot \left(\frac{3n+2}{4n+3} \right)^n;$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{n+1} \right)^{n^2};$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+5}{n^2+6} \right)^{n^3};$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(\ln(n+1))^{n/2}};$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{n^2};$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n^{n^2}}{(n+1)^{n^2}};$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} n^3 \left(\frac{5n^2+2}{7n^2+n+1} \right)^n;$$

$$11. \sum_{n=1}^{\infty} n^{n/2} \operatorname{arctg}^n \frac{1}{3\sqrt{n}};$$

$$12. \sum_{n=1}^{\infty} n^{n/2} (\sqrt{n+4} - \sqrt{n+1})^n;$$

$$13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{2^n} (n/(n+1))^{n^2};$$

$$14. \sum_{n=1}^{\infty} (e^{1/n} - 1) \cdot \left(\frac{n}{2} \right)^n;$$

$$15. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n^3 + 2n + 1}{5n^3 - 1} \right)^n (n+2)^4;$$

$$16. \sum_{n=1}^{\infty} n^{2n} \ln^n \frac{n^4 + 3n^2}{n^4 + 1};$$

$$17. \sum_{n=1}^{\infty} n^n \left(\sqrt{n^2 + 5} - \sqrt{n^2 + 1} \right)^n;$$

$$18. \sum_{n=1}^{\infty} (2n)^n \arcsin^n \frac{1}{4n};$$

$$19. \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(\frac{n^3 + n}{2n^3 + n + 1} \right)^n;$$

$$20. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^3 + 3}{n^3 + 4} \right)^{n^4};$$

$$21. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3} \right)^n \ln^n \frac{n^2 + 2n}{n^2 + 1};$$

$$22. \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{2/n^2} - 1 \right)^n \left(\frac{n}{4} \right)^{2n};$$

$$23. \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)^3 \left(\frac{4n^4 + 3}{5n^4 + 2n} \right)^n;$$

$$24. \sum_{n=1}^{\infty} n^{2n} \left(\sqrt{n^4 + 5} - \sqrt{n^4 + 1} \right)^n;$$

$$25. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^4 + 3}{n^4 + 2} \right)^{n^5}.$$

4.6. Користуючись інтегральною ознакою, дослідити на збіжність ряд:

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n^2}};$$

$$2. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^2 n};$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 4};$$

$$4. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n(\ln n + 1)};$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{e^n - 1}};$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^4 + 9};$$

$$7. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n (\ln \ln n)^2};$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{e^{n^3}};$$

$$9. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt{\ln n}};$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{1 + n^2};$$

$$11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4n + 1}};$$

$$12. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2 - 1};$$

$$13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2 + 1};$$

$$14. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln \ln n}{n \ln n};$$

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n + 1};$
16. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{2n-3}};$
17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}};$
18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^4 - 25};$
19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{n}};$
20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(3n-1)};$
21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)};$
22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3n^2 + 1}};$
23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(3n+2)};$
24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^2};$
25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}.$

4.7. Користуючись ознакою Лейбніца, дослідити на збіжність ряд:

1. $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot \sqrt[3]{n+1}}{\sqrt{n}-2};$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{sh} \frac{\sqrt{n}}{3n-1};$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[4]{2n+5}}{\sqrt[3]{3n+4}} (-1)^n;$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \sqrt{\ln n}}{\ln n + 10};$
5. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (n-3)}{n^2 - 1};$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{arctg} \frac{\sqrt[3]{n^2}}{n+3};$
7. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{(n^2 - 2)\sqrt{n+4}};$
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln(n+2)}{\sqrt{n+2}};$
9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)}{n \cdot \sqrt[4]{n+2}};$
10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{e^n};$
11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (2n+1)}{n(n+2)};$
12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \ln(n+1)}{n+1};$

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{\sqrt{n^3 + 2}};$
14. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \operatorname{th} \frac{n-1}{n^2 + 1};$
15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)}{\sqrt{n^3} + n + \sqrt{n} + 1};$
16. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \ln \ln n}{\ln n};$
17. $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 - 1}{n^4 - 1};$
18. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \operatorname{arctg} \frac{n^3}{n^2 + 1};$
19. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[3]{n-1}}{\sqrt{n+1}};$
20. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n (\ln n)^2}{(\ln n)^3 - 1};$
21. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{\frac{-n^2}{3+n}};$
22. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \operatorname{sh} \frac{3n+2}{n(n+1)};$
23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^{10}}{n^{22} + 3};$
24. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \frac{n^2 + n + 1}{n^2 + 3};$
25. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[4]{3n-1}}{\sqrt{n+2}}.$

4.8. Знайти область збіжності степеневого ряду:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x+1)^n}{n \cdot 2^n};$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1) \cdot 3^n} (x+4)^n;$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-3)^n}{2^n \cdot \sqrt{n}};$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n \sqrt{n+1}};$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)(x+3)^n}{3^{n+1}};$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x+5)^n}{n \cdot 2^n};$
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{2^n};$
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{\sqrt{n}};$
9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n (n+3)};$
10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{\sqrt[3]{n+1} \sqrt{n^2+1}};$
11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n \sqrt{n}};$
12. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{3n+2} \right)^n (x+2)^n;$

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2n+1};$
14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \left(\frac{x-1}{3} \right)^n;$
15. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-2)^n}{n \cdot 4^n};$
16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)(n+2)}{3} x^n;$
17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5 x^n}{2n-1};$
18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n x^n}{(2n-1)!!};$
19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(2n-1)(2n+1)};$
20. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1} x^n;$
21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2n(2n-3)};$
22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{\sqrt[3]{n+2}};$
23. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(3n+1)(2n+3)}{4} x^n;$
24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(3n-2)(3n+2)};$
25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3n+1} x^n.$

4.9. Розкласти функції в ряд за степенями x і знайти області збіжності цих розкладів:

1. $y = \frac{x}{1-x-2x^2};$
2. $y = \sin^3 x;$
3. $y = \frac{3-x}{2-x-x^2};$
4. $y = \sin 3x \sin 5x;$
5. $y = \ln(12-x-x^2);$
6. $y = \frac{3-8x}{1-5x+6x^2};$
7. $y = \cos 2x \cos 7x;$
8. $y = \ln(x^2-3x+2);$
9. $y = \operatorname{sh}^2 2x;$
10. $y = \frac{2x+3}{x^2+3x+2};$
11. $y = \cos^3 x;$
12. $y = \ln(1+3x+2x^2);$
13. $y = \frac{7-2x}{x^2-7x+12};$
14. $y = \sin x \cos^2 x;$
15. $y = \operatorname{ch}^2 3x;$
16. $y = (1+e^{2x})^2;$
17. $y = \frac{1}{\sqrt{1+x^4}};$

$$18. y = \frac{4x+3}{x^2-3x+2};$$

$$19. y = \ln \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}};$$

$$20. y = \sin 2x \cos 5x;$$

$$21. y = \ln(1-5x+4x^2);$$

$$22. y = \frac{3x+4}{x^2+x-6};$$

$$23. y = (1+x^2)^{-3/2};$$

$$24. y = \cos 2x \sin 9x;$$

$$25. y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

4.10. Розкласти функції в ряд за степенями $x-x_0$ і знайти області збіжності цих розкладів:

$$1. y = \frac{1}{4+3x}, x_0 = -2;$$

$$2. y = e^x, x_0 = 1;$$

$$3. y = \frac{1}{3+x}, x_0 = -2;$$

$$4. y = \sqrt[3]{x}, x_0 = 3;$$

$$5. y = \cos x, x_0 = \frac{\pi}{4};$$

$$6. y = \ln x, x_0 = 1;$$

$$7. y = \sqrt{x}, x_0 = 2;$$

$$8. y = \frac{1}{1-x}, x_0 = -2;$$

$$9. y = \sqrt{x^3}, x_0 = 1;$$

$$10. y = e^{-3x}, x_0 = -4;$$

$$11. y = \ln \frac{1}{2+2x+x^2}, x_0 = -1;$$

$$12. y = \frac{1}{5+2x}, x_0 = 3;$$

$$13. y = \sin x, x_0 = 1;$$

$$14. y = \frac{1}{x^2-4x+3}, x_0 = 2;$$

$$15. y = \frac{1}{\sqrt{4+x}}, x_0 = -3;$$

$$16. y = \frac{1}{x}, x_0 = 3;$$

$$17. y = \cos x, x_0 = 1;$$

$$18. y = \ln x, x_0 = 3;$$

$$19. y = \sin x, x_0 = -2;$$

$$20. y = \operatorname{ch} x, x_0 = -1;$$

$$21. y = e^{2x}, x_0 = -2;$$

$$22. y = \frac{2}{x+3}, x_0 = -1;$$

$$23. y = \frac{1}{\sqrt[3]{4+x}}, x_0 = -1;$$

$$24. y = \frac{1}{x^2-9x+10}, x_0 = 3;$$

$$25. y = \operatorname{sh} x, x_0 = 1.$$

4.11. Знайти розкладання в ряд Фур'є функції, що задана на вказаному інтервалі:

1. $f(x) = \begin{cases} x, & -\pi \leq x < 0, \\ \pi, & 0 \leq x \leq \pi, \end{cases}$ на інтервалі $[-\pi, \pi]$.

2. $f(x) = \frac{x}{3}$ на інтервалі $[0, 3]$ по косинусах.

3. $f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi - x}{2}, & -\pi \leq x \leq 0, \\ \frac{\pi - x}{2}, & 0 < x \leq \pi, \end{cases}$ на інтервалі $[-\pi, \pi]$.

4. $f(x) = x^2$ на інтервалі $(0, \pi)$ по синусах.

5. $f(x) = |x|$ на інтервалі $[-\pi, \pi]$.

6. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0, \\ x, & 0 \leq x \leq \pi, \end{cases}$ на інтервалі $[-\pi, \pi]$.

7. $f(x) = \pi + x$ на інтервалі $[-\pi, \pi]$.

8. $f(x) = 2x$ на інтервалі $(0, \pi)$ по синусах.

9. $f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$ на інтервалі $(0, \pi)$ по косинусах.

10. $f(x) = x \sin x$ інтервалі $[-\pi, \pi]$.

11. $f(x) = \begin{cases} 0, & -2 \leq x \leq 0, \\ \frac{x}{2}, & 0 < x \leq 2, \end{cases}$ на інтервалі $[-2, 2]$.

12. $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < \frac{1}{2}, \\ x - \frac{1}{2}, & \frac{1}{2} \leq x < 1, \end{cases}$ на інтервалі $(0, 1)$ по косинусах.

13. $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2} - x, & 0 < x \leq \frac{3}{2}, \\ 0, & \frac{3}{2} < x < 3, \end{cases}$ на інтервалі $(0, 3)$ по косинусах.

14. $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ 1-x, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \end{cases}$ на інтервалі $[0,1]$ по синусах.
15. $f(x) = \begin{cases} -x, & -\pi \leq x \leq 0, \\ \frac{x^2}{\pi}, & 0 < x \leq \pi, \end{cases}$ на інтервалі $[-\pi, \pi]$.
16. $f(x) = \begin{cases} -2x, & -\pi < x \leq 0, \\ 3x, & 0 < x < \pi, \end{cases}$ на інтервалі $(-\pi, \pi)$.
17. $f(x) = \begin{cases} 4x, & -\pi < x < 0, \\ -x, & 0 \leq x < \pi, \end{cases}$ на інтервалі $(-\pi, \pi)$.
18. $f(x) = x^2$ на інтервалі $[-\pi, \pi]$ по косинусах.
19. $f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - x, & 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \frac{\pi}{2} \leq x < \pi, \end{cases}$ на інтервалі $(0, \pi)$ по косинусах.
20. $f(x) = \cos 2x$ на інтервалі $(0, \pi)$ по синусах.
21. $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2-x, & 1 < x \leq 2, \end{cases}$ на інтервалі $[0,2]$ по косинусах.
22. $f(x) = x \cos x$ на інтервалі $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
23. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0, \\ \sin x, & 0 \leq x \leq \pi, \end{cases}$ на інтервалі $[-\pi, \pi]$.
24. $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < 2, \\ x-2, & 2 \leq x < 4, \end{cases}$ по косинусах на інтервалі $(0,4)$.
25. $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{4}, \\ \frac{1}{2} - x, & \frac{1}{4} < x \leq \frac{1}{2}, \end{cases}$ на інтервалі $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ по синусах.

Список рекомендованої літератури

1. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г. Н. Берман. – Изд. 16-е. – М. : Наука, 1969. – 440 с.
2. Воробьев Н. Н. Теория рядов / Н. Н. Воробьев. – Изд. 3-е, испр. и доп. – М. : Наука, 1975. – 368 с.
3. Градштейн И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. – Изд. 4-е, перераб. – М. : Физматгиз, 1963. – 1100 с.
4. Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу / Б. П. Демидович. – Изд. 8-е, стереотип. – М. : Наука, 1972. – 544 с.
5. Кудрявцев Л. Д. Сборник задач по математическому анализу : Интегралы. Ряды : учеб. пособие для вузов / Л. Д. Кудрявцев, А. Д. Кутасов, В. И. Чехлов, М. И. Шабунин. Под ред. Л. Д. Кудрявцева. – М. : Наука, 1986. – 528 с.
6. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : В 3 т. – Т. 2 / Г. М. Фихтенгольц. – Изд. 7-е, стереотип. – М. : Наука, 1969. – 800 с.
7. Шмелев П. А. Теория рядов в задачах и упражнениях : учеб. пособие / П. А. Шмелев. – М. : Высшая школа, 1983. – 176 с.

Зміст

Передмова	3
1. Числові ряди	4
1.1. Основні поняття	4
1.2. Знакосталі ряди	5
1.3. Знакозмінні ряди	7
1.4. Загальна схема дослідження збіжності числового ряду...	8
2. Степеневі ряди	9
2.1. Основні поняття	9
2.2. Схема дослідження області збіжності степеневого ряду....	10
2.3. Розкладання основних елементарних функцій в ряд Маклорена	10
3. Ряди Фур'є	11
3.1. Основні поняття	11
3.2. Схема розкладання функції у ряд Фур'є	12
4. Завдання для самостійної роботи	13
Список рекомендованої літератури	26

Індивідуальні завдання
з математичного аналізу за темою
«Ряди»

Практикум

Укладачі:

Вакарчук Михайло Борисович
Руденко Олександр Олексійович

Головний редактор С. М. Козлов
Техредактор Ю. І. Артеменко

Підписано до друку 11.01.2016 р. Формат 60×84/16. Папір друкарський.
Друк плоский. Ум. друк. арк. 1,6. Ум. фарбовідб. 1,6.
Обл.-вид. арк. 0,8. Тираж 100 пр. Зам. 12.

АТ «Книга», вул. Артема, 25, м. Київ.
Свідоцтво про держреєстрацію 24729912 від 11.03.1997 р.